Intégrales Généralisées

Exercice 1.

Montrer la convergence et calculer la valeur des intégrales :

$$I_1=\int_0^{+\infty} t^3e^{-t}dt\,;\ \ I_2=\int_1^{+\infty}\frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}dt\,;\ \ I_3=\int_0^{+\infty}\frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2}dt$$

Allez à : Correction exercice 1

Exercice 2.

Les intégrales généralisées suivantes convergentes ou divergentes ?

$$I_1=\int_2^{+\infty}\ln(t)\,dt\,;\ I_2=\int_0^{2}\ln(t)\,dt\,;I_3=\int_0^{+\infty}e^{-4t}dt\,;I_4=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt\,;I_5=\int_0^{+\infty}\frac{t^5}{(t^4+1)\sqrt{t}}dt$$

$$I_6=\int_0^{\pi}\ln(\sin(t))\,dt\,;I_7=\int_2^{+\infty}\left(1-\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt\,;I_8=\int_0^{1}\sin\left(\frac{1}{t}\right)dt\,,I_9=\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\ln\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt$$

Allez à : Correction exercice 2

Exercice 3.

1. Soit F la fonction définie par :

$$F(x)=\int_1^{x}\frac{\ln(1+t^2)}{t^2}dt$$

   Calculer $F(x)$.

2. En déduire que l'intégrale

$$I=\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+t^2)}{t^2}dt$$

   Est convergente et déterminer sa valeur.

Allez à : Correction exercice 3

Exercice 4.

1. Calculer

$$F(x)=\int_1^{x}\frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}dt$$

   A l'aide du changement de variable $u=\sqrt{t^2+1}$

2. Montrer avec les règles de Riemann que

$$I=\int_1^{+\infty}\frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}dt$$

   Converge.

3. Calculer

$$I=\int_1^{+\infty}\frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}dt$$

Allez à : Correction exercice 4

Exercice 5.

Etudier la convergence des intégrales :

$$I_1=\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t(\ln(t))^2}\,;I_2=\int_3^{+\infty}\frac{\arctan(t)}{t^2+2t+7}dt$$

Allez à : Correction exercice 5

Exercice 6.

Etudier la convergence de l'intégrale

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{t^x+t^{2-x}}{t^3+\sqrt{t}}dt$$

Selon les valeurs de $x\in\mathbb{R}$

Allez à : Correction exercice 6

Exercice 7.

Soient a et b deux paramètres réels. Discuter selon leurs valeurs de la convergence de

$$\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t^a(\ln(t))^b}$$

On pourra :

a) Lorsque $a\neq 1$, utiliser les règles de Riemann.

b) Lorsque $a=1$, calculer explicitement $\int_2^A\frac{dt}{t(\ln(t))^b}$ pour A réel destiné à tendre vers $+\infty$.

Allez à : Correction exercice 7

Exercice 8.

1. Soit $\alpha>0$. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t^{\alpha+1}}dt$ converge.

   En déduire que $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t^\alpha}dt$ converge (intégrer par partie).

2. Montrer que $\int_1^{+\infty}\frac{\cos^2(t)}{t}dt$ diverge (linéariser $\sin^2(t)$)

   En déduire que $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|dt$ diverge.

   Vérifier que quand $t\to+\infty$

$$\frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}\sim\frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}+\frac{\cos^2(t)}{t}$$

   Mais que pourtant $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}dt$ et $\int_0^{+\infty}\left(\frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}+\frac{\cos^2(t)}{t}\right)dt$ ne sont pas de même nature.

Allez à : Correction exercice 8

Exercice 9.

1. Démontrer la convergence de l'intégrale $\int_0^1\frac{x-1}{\ln(x)}dx$.
2. Montrer que, pour tout $x\in]0,1[$, $\frac{x-1}{x}\leq\ln(x)<x-1$.
3. Pour $X\in]0,1[$, démontrer l'égalité :

$$\int_0^X\frac{xdx}{\ln(x)}=\int_0^{X^2}\frac{dx}{\ln(x)}$$

4. En déduire un encadrement de $\int_0^X\frac{x-1}{\ln(x)}dx$ et montrer que

$$\int_0^1\frac{x-1}{\ln(x)}dx=\ln(2)$$

Allez à : Correction exercice 9

Exercice 10.

Soient f et g deux fonctions continues et strictement positives toutes deux définies sur un même intervalle $[a,b[$ (où b peut-être un réel ou désigner $+\infty$), équivalentes au voisinages de b.

On sait bien sûr que les deux intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.

Montrer que si ces intégrales convergent, alors $\int_x^b f(t)dt$ et $\int_x^b g(t)dt$ sont équivalentes lorsque x tend vers b par valeurs strictement inférieures.

Allez à : Correction exercice 10

Exercice 11.

Soit $I=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(t)}{t^2+a^2}dt$ avec $a>0$.

Pour tout $\varepsilon>0$ et pour tout $X>0$ on définit : $I_{\varepsilon,X}=\int_\varepsilon^X\frac{\ln(t)}{t^2+a^2}dt$

1. Montrer que I est une intégrale convergente.
2. A l'aide du changement de variable $t=\frac{a^2}{x}$ montrer que :

$$I_{\varepsilon,X}=-\frac{2\ln(a)}{a}\arctan\left(\frac{a}{X}\right)+\frac{2\ln(a)}{a}\arctan\left(\frac{a}{\varepsilon}\right)+\int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}}\frac{\ln(t)}{t^2+a^2}dt$$

3. En faisant tendre ε vers 0 et X vers $+\infty$ dans l'équation ci-dessus et en déduire une relation vérifiée par I, puis la valeur de I.

Allez à : Correction exercice 11

Corrections

Correction exercice 1.

-

$$\lim_{t\to+\infty}t^2\times t^3e^{-t}=0$$

D'après les règles de Riemann $t^\alpha f(t)\to 0$ en $+\infty$ avec $\alpha>1$ montre que I_1 converge.

On cherche une primitive de $t\to t^3e^{-t}$ de la forme

$$F(t)=(at^3+bt^2+ct+d)e^{-t}$$

$$F'(t)=(3at^2+2bt+c)e^{-t}-(at^3+bt^2+ct+d)e^{-t}$$
$$=(-at^3+(3a-b)t^2+(2b-c)t+c-d)e^{-t}$$

$$(-at^3+(3a-b)t^2+(2b-c)t+c-d)e^{-t}=t^3e^{-t}\Leftrightarrow\begin{cases}-a=1\\3a-b=0\\2b-c=0\\c-d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=-3\\c=-6\\d=-6\end{cases}$$

$$\int_0^X t^3e^{-t}dt=[(-t^3-3t^2-6t-6)e^{-t}]_0^X=(-X^3-3X^2-6X-6)e^{-X}+6\to_{X\to+\infty}6$$

$$I_1=6$$

Allez à : Exercice 1

- La fonction est positive

$$\frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}\sim_{+\infty}\frac{1}{t^2}$$

Il s'agit d'une fonction de Riemann intégrable $\alpha=2>1$

On fait le changement de variable $u=t^2+1\Leftrightarrow t=\sqrt{u-1}$ dans l'intégrale

$$\int_1^X\frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}dt=\int_1^X\frac{tdt}{t^2\sqrt{t^2+1}}$$

On retrouve « presque » $du=2tdt$ au numérateur

$$t=1\Rightarrow u=1^2+1=2\qquad\text{et}\qquad t=X\Rightarrow u=X^2+1$$

$$\int_1^X\frac{tdt}{t^2\sqrt{t^2+1}}=\frac{1}{2}\int_2^{X^2+1}\frac{du}{(u-1)\sqrt{u}}$$

On fait le changement de variable $v=\sqrt{u}\Leftrightarrow u=v^2$, $du=2vdv$

$$u=2\Rightarrow v=\sqrt{2}\qquad et\qquad u=X^2+1\Rightarrow v=\sqrt{X^1+1}$$

$$\frac{1}{2}\int_2^{X^2+1}\frac{du}{(u-1)\sqrt{u}}=\frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{X^2+1}}\frac{2vdv}{(v^2-1)v}=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{X^2+1}}\frac{dv}{v^2-1}$$

$$\frac{1}{v^2-1}=\frac{1}{(v-1)(v+1)}=\frac{\frac{1}{2}}{v-1}+\frac{-\frac{1}{2}}{v+1}$$

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{X^2+1}}\frac{dv}{v^2-1}=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{X^2+1}}\left(\frac{1}{v-1}-\frac{1}{v+1}\right)dv=[\ln|v-1|-\ln|v+1|]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{X^2+1}}=\left[\ln\left|\frac{v-1}{v+1}\right|\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{X^2+1}}$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{X^2+1}-1}{\sqrt{X^2+1}+1}\right|-\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|$$

$$\ln\left|\frac{\sqrt{X^2+1}-1}{\sqrt{X^2+1}+1}\right|=\ln\left|\frac{X\left(\sqrt{1+\frac{1}{X^2}}-\frac{1}{X}\right)}{X\left(\sqrt{1+\frac{1}{X^2}}+\frac{1}{X}\right)}\right|=\ln\left|\frac{\sqrt{1+\frac{1}{X^2}}-\frac{1}{X}}{\sqrt{1+\frac{1}{X^2}}+\frac{1}{X}}\right|\to 0$$

$$-\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|=\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)=\ln\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}=2\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$$

Donc $I_2=2\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$

Allez à : Exercice 1

- Il y a deux problèmes, un en 0 et un autre en $+\infty$.

$$\lim_{t\to 0}\frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2}=0$$

Donc la fonction à intégrer est prolongeable par continuité en 0, elle est intégrable

En l'infini

$$\frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2}\sim\frac{\ln(t)}{t^3}$$

$$t^2\times\frac{\ln(t)}{t^3}=\frac{\ln(t)}{t}\to 0$$

D'après les règles de Riemann $t^{\alpha}f(t)\to_{+\infty}0$ avec $\alpha>1$, la fonction est intégrable. On pose

$$I_3(\epsilon,X)=\int_0^X\frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2}dt$$

Puis on fait une intégration par partie

$\int_\epsilon^X\frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2}dt$	
$u'(t)=\frac{t}{(t^2+1)^2}$	$u(t)=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{t^2+1}$
$v(t)=\ln(t)$	$v'(t)=\frac{1}{t}$
$\int_\epsilon^X\frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2}dt=\left[-\frac{1}{2}\times\frac{1}{t^2+1}\ln(t)\right]_\epsilon^X-$	$\left(-\frac{1}{2}\right)\int_\epsilon^X\frac{1}{t(t^2+1)}dt$

$$\int_\epsilon^X \frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2}dt = \left[-\frac{1}{2}\times\frac{1}{t^2+1}\ln(t)\right]_\epsilon^X + \frac{1}{2}\int_\epsilon^X \frac{1}{t(t^2+1)}dt$$
$$= -\frac{1}{2}\times\frac{1}{X^2+1}\ln(X) + \frac{1}{2}\times\frac{1}{\epsilon^2+1}\ln(\epsilon) + \frac{1}{2}\int_\epsilon^X \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1}\right)dt$$
$$= -\frac{1}{2}\times\frac{1}{X^2+1}\ln(X) + \frac{1}{2}\times\frac{1}{\epsilon^2+1}\ln(\epsilon) + \frac{1}{2}\left[\ln(t) - \frac{1}{2}\ln(t^2+1)\right]_\epsilon^X$$
$$= -\frac{1}{2}\times\frac{1}{X^2+1}\ln(X) + \frac{1}{2}\times\frac{1}{\epsilon^2+1}\ln(\epsilon)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\ln(X) - \frac{1}{2}\ln(X^2+1) - \ln(\epsilon) - \frac{1}{2}\ln(\epsilon^2+1)\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\times\frac{1}{X^2+1}\ln(X) + \frac{1}{2}\ln(\epsilon)\left(\frac{1}{\epsilon^2+1} - 1\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{X}{\sqrt{X^2+1}}\right) - \frac{1}{4}\ln(\epsilon^2+1)$$
$$= -\frac{1}{2}\times\frac{1}{X^2+1}\ln(X) - \frac{1}{2}\ln(\epsilon)\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{X^2}}}\right) - \frac{1}{4}\ln(\epsilon^2+1)$$

Maintenant il n'y a plus de forme indéterminée compliquée, la limite est nulle

$$I_3 = 0$$

Remarque :

Il existe une bonne ruse pour cette intégrale, sachant que l'intégrale converge on peut faire le changement de variable $t = \frac{1}{u} \Leftrightarrow u = \frac{1}{t}$, $dt = -\frac{du}{u^2}$

$$t = 0^+ \Rightarrow u = +\infty$$
$$t = +\infty \Rightarrow u = 0$$

$$I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2}dt = \int_{+\infty}^0 \frac{\frac{1}{u}\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{\left(\frac{1}{u^2}+1\right)^2}\left(-\frac{du}{u^2}\right) = -\int_0^{+\infty} \frac{1}{u}\frac{-\ln(u)}{\left(\frac{1+u^2}{u^2}\right)^2}\left(-\frac{du}{u^2}\right)$$
$$= -\int_0^{+\infty} \frac{1}{u^3}\frac{\ln(u)}{\frac{(1+u^2)^2}{u^4}}du = -\int_0^{+\infty} \frac{u\ln(u)}{(u^2+1)^2}du = -I_3$$

Donc $I_3 = 0$

Allez à : Exercice 1

Correction exercice 2.

- Il y a un problème en $+\infty$, soit on sait qu'une primitive de ln est $t \to t\ln(t) - t$ et cette primitive tend vers l'infini, soit on applique les règles de Riemann en $+\infty$ avec $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$

$$t^{\frac{1}{2}}\ln(t) \to +\infty$$

I_1 diverge.

Allez à : Exercice 2

- Il y a un problème en 0, soit on sait qu'une primitive de ln est $t \to t\ln(t) - t$ et cette primitive tend vers une limite finie 0 donc l'intégral converge, soit on applique les règles de Riemann en 0 avec $\alpha = \frac{1}{2} < 1$

$$t^{\frac{1}{2}}\ln(t) \to 0$$

I_2 converge.

Allez à : Exercice 2

-

$$I_3=\int_0^{+\infty}e^{-4t}dt=\left[-\frac{1}{4}e^{-4t}\right]_0^{+\infty}=0+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

I_3 converge.

Allez à : Exercice 2

- Problème en $+\infty$

$$t^2e^{-t^2}\to 0$$

D'après les règles de Riemann $x^\alpha f(x)\to 0$ avec $\alpha>1$ entraine que la fonction est intégrable en $+\infty$

Allez à : Exercice 2

- Il y a un problème en 0 et un en $+\infty$

En $+\infty$

$$\frac{t^5}{(t^4+1)\sqrt{t}}\sim\sqrt{t}=\frac{1}{t^{-\frac{1}{2}}}$$

Il s'agit d'une fonction de Riemann avec $\alpha=-\frac{1}{2}\leq 1$ donc l'intégrale I_5 diverge (ce qui est évident, si on essaye d'intégrer $t\to\sqrt{t}$ on voit clairement le problème en $+\infty$). I_4 diverge.

Du coup il est inutile d'étudier l'intégrabilité en 0 mais cela ne posait pas de problème

$$\frac{t^5}{(t^4+1)\sqrt{t}}\sim\frac{t^5}{\sqrt{t}}=t^{\frac{9}{2}}$$

La fonction est prolongeable par continuité en 0.

Allez à : Exercice 2

- Il y a deux problèmes un en 0 et un autre en π

En 0

$$\ln(sin(t))=\ln\big(t+o(t)\big)=\ln\big(t+o(t)\big)=\ln\big(t\big(1+o(1)\big)=\ln(t)+\ln\big(1+o(1)\big)\sim\ln(t)$$

On applique les règles de Riemann en 0 avec $\alpha=\frac{3}{2}>1$

$$t^{\frac{3}{2}}\ln(t)\to 0$$

L'intégrale converge en 0

En π, on pose $u=\pi-t\to 0$ (c'est mieux que $u=t-\pi$)

$$\ln(\sin(t))=\ln(sin(u-\pi))=\ln(sin(u))$$

Comme précédemment l'intégrale converge.

Finalement l'intégrale I_6 converge.

Allez à : Exercice 2

- Il y a un problème en $+\infty$

$$1-\cos\left(\frac{1}{t}\right)=1-\left(1-\frac{\left(\frac{1}{t}\right)^2}{2!}+o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)=\frac{1}{2t^2}+o\left(\frac{1}{t^2}\right)\sim\frac{1}{2t^2}$$

Il s'agit d'une fonction de Riemann avec $\alpha=2$ intégrable en $+\infty$. I_7 converge.

Allez à : Exercice 2

- Il y a un problème en 0, mais attention on ne peut pas faire de développement limité de $t\to\sin\left(\frac{1}{t}\right)$ car la variable $\frac{1}{t}$ tend vers l'infini. On pose $I_8(\epsilon)=\int_\epsilon^1\sin\left(\frac{1}{t}\right)dt$, puis on fait le changement de variable $u=\frac{1}{t}\Leftrightarrow t=\frac{1}{u}$, $dt=-\frac{du}{u^2}$. $t=\epsilon\Rightarrow u=\frac{1}{\epsilon}$ et $t=1\Rightarrow u=1$

$$I_8(\epsilon)=\int_\epsilon^1\sin\left(\frac{1}{t}\right)dt=\int_1^{\frac{1}{\epsilon}}\sin(u)\left(-\frac{du}{u^2}\right)=-\int_1^{\frac{1}{\epsilon}}\frac{\sin(u)}{u^2}du$$

$\frac{1}{\epsilon}\to+\infty$ il s'agit de voir si la fonction $u\to\frac{\sin(u)}{u^2}$ est intégrable en $+\infty$

$$\left|\frac{\sin(u)}{u^2}\right| \leq \frac{1}{u^2}$$

Il s'agit d'une fonction de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$ intégrable en $+\infty$ donc la fonction $u \to \frac{\sin(u)}{u^2}$ est absolument intégrable en $+\infty$ donc intégrable et I_8 converge.

Allez à : Exercice 2

- Attention il y a deux problèmes en $\frac{2}{\pi}$ parce que $\cos\left(\frac{2}{\frac{2}{\pi}}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et un autre en $+\infty$

En $\frac{2}{\pi}$ on pose $u = t - \frac{2}{\pi} \Leftrightarrow t = u + \frac{2}{\pi}$

$$\ln\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) = \ln\left(\cos\left(\frac{1}{u+\frac{2}{\pi}}\right)\right) = \ln\left(\cos\left(\frac{1}{\frac{2}{\pi}\left(1+\frac{\pi}{2}u\right)}\right)\right) = \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{1}{1+\frac{\pi}{2}u}\right)\right)$$

$$= \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\pi}{2}u+o(u)\right)\right)\right) = \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^2}{4}u+o(u)\right)\right)$$

$$= \ln\left(\sin\left(\frac{\pi^2}{4}u+o(u)\right)\right) = \ln\left(\frac{\pi^2}{4}u+o(u)\right) = \ln\left(\frac{\pi^2}{4}\right) + \ln\big(u+o(u)\big) \sim \ln(u)$$

$$u^{\frac{1}{2}}\ln(u) \to 0$$

Lorsque u tend vers 0, d'après les règles de Riemann si $u^\alpha f(u) \to 0$ avec $\alpha < 1$ alors la fonction est intégrable en 0 donc $t \to \ln\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)$ est intégrable en $\frac{2}{\pi}$

En $+\infty$

$$\ln\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) = \ln\left(1 - \frac{\left(\frac{1}{t}\right)^2}{2!} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) = -\frac{1}{2t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right) \sim -\frac{1}{2t^2}$$

Il s'agit d'une fonction de Riemann intégrable en $+\infty$ avec $\alpha = 2 > 1$

Allez à : Exercice 2

Correction exercice 3.

1.

$F(x) = \int_1^x \frac{\ln(1+t^2)}{t^2} dt$

$u'(x) = \frac{1}{t^2}$ $\qquad$ $u(x) = -\frac{1}{t}$

$v(x) = \ln(1+t^2)$ $\qquad$ $v'(x) = \frac{2t}{1+t^2}$

$F(x) = \left[-\frac{1}{t}\ln(1+t^2)\right]_1^x$ $\qquad$ $-\int_1^x \frac{2t}{-t(t^2+1)} dt$

$$F(x) = \left[-\frac{1}{t}\ln(1+t^2)\right]_1^x + 2\int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt = -\frac{1}{x}\ln(1+x^2) + \ln(2) + 2\arctan(x) - 2\arctan(1)$$

$$= -\frac{1}{x}\ln(1+x^2) + \ln(2) + 2\arctan(x) - \frac{\pi}{2}$$

2.

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x}\ln(1+x^2) = 0$$

Et

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

Donc $F(x)$ admet une limite finie, ce qui signifie que I converge et

$$I=\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}dt=\ln(2)+\pi-\frac{\pi}{2}=\ln(2)+\frac{\pi}{2}$$

Allez à : Exercice 3

Correction exercice 4.

1. $u=\sqrt{t^2+1}\Leftrightarrow u^2=t^2+1\Leftrightarrow t^2=u^2-1\Leftrightarrow t=\sqrt{u^2-1}$
   Ce qui entraine que
$$dt=\frac{2udu}{2\sqrt{u^2-1}}=\frac{udu}{\sqrt{u^2-1}}$$
$$t=1\Rightarrow u=\sqrt{2}$$
$$t=X\Rightarrow u=\sqrt{X^2+1}$$
$$F(x)=\int_1^x\frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}dt=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{X^2+1}}\frac{1}{\sqrt{u^2-1}u}\frac{udu}{\sqrt{u^2-1}}=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{X^2+1}}\frac{du}{u^2-1}$$
   Il existe a et b deux réels tels que :
$$\frac{1}{u^2-1}=\frac{1}{(u-1)(u+1)}=\frac{a}{u-1}+\frac{b}{u+1}$$
   On multiplie par $u-1$, puis $u=1$
$$a=\left[\frac{1}{u+1}\right]_{u=1}=\frac{1}{2}$$
   On multiplie par $u+1$, puis $u=-1$
$$b=\left[\frac{1}{u-1}\right]_{u=1}=-\frac{1}{2}$$
$$F(x)=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{X^2+1}}\frac{du}{u^2-1}=\frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{X^2+1}}\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)du=\frac{1}{2}[\ln|u-1|-\ln|u+1|]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{X^2+1}}$$
$$=\frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{X^2+1}}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{X^2+1}-1}{\sqrt{X^2+1}+1}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|$$
2. $\frac{3}{2}>1$ et
$$\lim_{t\to+\infty}t^{\frac{3}{2}}\frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}=0$$
   Donc $\frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}$ est intégrable en $+\infty$
3. Première méthode
$$F(x)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{X\left(\sqrt{1+\frac{1}{X^2}}-\frac{1}{X^2}\right)}{X\left(\sqrt{1+\frac{1}{X^2}}+\frac{1}{X^2}\right)}\right|-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+\frac{1}{X^2}}-\frac{1}{X^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{X^2}}+\frac{1}{X^2}}\right|-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)\xrightarrow[X\to+\infty]{}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)=-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{2-1}\right)$$
$$=-\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$$
   Deuxième méthode, on pose $t=\sqrt{X^2+1}\to+\infty$
$$F(x)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|\xrightarrow[t\to+\infty]{}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|$$

Allez à : Exercice 4

Correction exercice 5.

- Il y a un problème en $+\infty$. Malheureusement les règles de Riemann ne marchent, essayons quand même

Convergence

$$t^{\alpha}\frac{1}{t(\ln(t))^2}=\frac{t^{\alpha-1}}{(\ln(t))^2}\to 0$$

Impose que $\alpha\leq 1$ mais pour utiliser la règle de Riemann concluant à la convergence en $+\infty$ il faut que α soit strictement supérieur à 1

Divergence

$$t^{\alpha}\frac{1}{t(\ln(t))^2}=\frac{t^{\alpha-1}}{(\ln(t))^2}\to +\infty$$

Impose que $\alpha>1$ mais pour utiliser la règle de Riemann concluant à la divergence en $+\infty$ il faut que α soit inférieur ou égal à 1.

Dans ce cas on fait autrement

$$I_1(X)=\int_2^X\frac{dt}{t(\ln(t))^2}=\left[-\frac{1}{\ln(t)}\right]_2^X=-\frac{1}{\ln(X)}+\frac{1}{\ln(2)}\to\frac{1}{\ln(2)}$$

Donc I_1 converge.

Allez à : Exercice 5

- t^2+2t+7 n'est jamais nul

$$\left|\frac{\arctan(t)}{t^2+2t+7}\right|<\frac{\frac{\pi}{2}}{t^2}=\frac{\pi}{2t^2}$$

Il s'agit d'une fonction de Riemann intégrable en $+\infty$ avec $\alpha=2$. Donc I_2 converge.

Allez à : Exercice 5

Correction exercice 6.

Il y a deux problème, un en 0 et un $+\infty$

En 0, $t^3+\sqrt{t}\sim\sqrt{t}$

Si $x\geq 2-x\Leftrightarrow x\geq 1$, alors $t^x+t^{2-x}\sim t^{2-x}$

Donc

$$\frac{t^x+t^{2-x}}{t^3+\sqrt{t}}\sim\frac{t^{2-x}}{\sqrt{t}}=\frac{1}{t^{x-\frac{3}{2}}}$$

Il s'agit d'une fonction de Riemann convergente (en 0) si et seulement si $x-\frac{3}{2}<1\Leftrightarrow x<\frac{5}{2}$

$x\geq 1$ et $x<\frac{5}{2}$. Il y a convergence pour $x\in\left[1,\frac{5}{2}\right[$

Si $x\leq 2-x\Leftrightarrow x\leq 1$, alors $t^x+t^{2-x}\sim t^x$

Donc

$$\frac{t^x+t^{2-x}}{t^3+\sqrt{t}}\sim\frac{t^x}{\sqrt{t}}=\frac{1}{t^{\frac{1}{2}-x}}$$

Il s'agit d'une fonction de Riemann convergente si et seulement si $\frac{1}{2}-x<1\Leftrightarrow x>-\frac{1}{2}$

$x\leq 1$ et $x>-\frac{1}{2}$. Il y a convergence si $n\in\left]-\frac{1}{2},1\right]$

Finalement il y a convergence en 0 si et seulement si $x\in\left]-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right[$

En $+\infty$, $t^3+\sqrt{t}\sim t^3$

Si $x\leq 2-x\Leftrightarrow x\leq 1$, alors $t^x+t^{2-x}\sim t^{2-x}$

Donc

$$\frac{t^x+t^{2-x}}{t^3+\sqrt{t}}\sim\frac{t^{2-x}}{t^3}=\frac{1}{t^{x+1}}$$

Il s'agit d'une fonction de Riemann convergente (en $+\infty$) si et seulement si $n+1>1 \Leftrightarrow n>0$

$x \leq 1$ et $x>0$. il y a convergence pour $x \in]0,1]$.

Si $x \geq 2-x \Leftrightarrow x \geq 1$, alors $t^x + t^{2-x} \sim t^x$

Donc

$$\frac{t^x + t^{2-x}}{t^3 + \sqrt{t}} \sim \frac{t^x}{t^3} = \frac{1}{t^{3-x}}$$

Il s'agit d'une fonction de Riemann convergente (en $+\infty$) si et seulement si $3-x>1 \Leftrightarrow x<2$

$x \geq 1$ et $x<2$. Il y a convergence si $x \in [1,2[$

Finalement il y a convergence en $+\infty$ si et seulement si $x \in]0,2[$

I_3 converge si et seulement si $x \in]0,2[\cap \left]-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right[=]0,2[$

Allez à : Exercice 6

Correction exercice 7.

a)

Si $a>1$, on choisit $\alpha \in]1,a[$

$$t^\alpha \frac{1}{t^a(\ln(t))^b} = \frac{t^{\alpha-a}}{(\ln(t))^b} \to 0$$

Lorsque $t \to +\infty$

D'après les règles de Riemann l'intégrale converge en $+\infty$ car $\alpha>1$

Si $a<1$, on choisit $\alpha \in]a,1[$

$$t^\alpha \frac{1}{t^a(\ln(t))^b} = \frac{t^{\alpha-a}}{(\ln(t))^b} \to +\infty$$

Lorsque $t \to +\infty$

D'après les règles de Riemann l'intégrale diverge en $+\infty$ car $\alpha<1$

b) Si $b \neq 1$

$$\int \frac{1}{t\,(\ln(t))^b} dt = \int (\ln(t))^{-b} \times \frac{1}{t} dt = \frac{(\ln(t))^{-b+1}}{-b+1} + K$$

Si $-b+1>0 \Leftrightarrow b<1$

$$(\ln(t))^{-b+1} \to +\infty$$

Lorsque $t \to +\infty$ alors l'intégrale diverge

Si $-b+1<0 \Leftrightarrow b>1$

$$(\ln(t))^{-b+1} \to 0$$

Lorsque $t \to +\infty$ alors l'intégrale converge

Si $b=1$

$$\int \frac{dt}{t\ln(t)} = \ln(ln(t)) + K \to +\infty$$

Lorsque $t \to +\infty$ alors l'intégrale diverge.

Allez à : Exercice 7

Correction exercice 8.

1. Il y a un problème en $+\infty$

$$\left|\frac{\sin(t)}{t^{\alpha+1}}\right| \leq \frac{1}{t^{\alpha+1}}$$

Or $\alpha+1>1$, donc il s'agit d'une fonction de Riemann intégrable en $+\infty$, donc $t \to \frac{\sin(t)}{t^{\alpha+1}}$ est absolument intégrable et donc intégrable.

$\int_1^{+X}\frac{\sin(t)}{t^{\alpha+1}}dt$	
$u'(t)=\frac{1}{t^{\alpha+1}}=t^{-\alpha-1}$	$u(t)=\frac{t^{-\alpha}}{-\alpha}$
$v(t)=\sin(t)$	$v'(t)=\cos(t)$
$\int_1^X\frac{\sin(t)}{t^{\alpha+1}}dt=\left[\frac{t^{-\alpha}}{-\alpha}\sin(t)\right]_1^X-$	$\int_1^X\left(\frac{t^{-\alpha}}{-\alpha}\right)\cos(t)\,dt$

$$\int_1^X\frac{\sin(t)}{t^{\alpha+1}}dt=\left[\frac{t^{-\alpha}}{-\alpha}\sin(t)\right]_1^X+\frac{1}{\alpha}\int_1^X t^{-\alpha}\cos(t)\,dt=-\frac{\sin(X)}{\alpha X^\alpha}+\frac{\sin(1)}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}\int_1^X\frac{\cos(t)}{t^\alpha}dt$$

Soit encore

$$\int_1^X\frac{\sin(t)}{t^{\alpha+1}}dt=\left[\frac{t^{-\alpha}}{-\alpha}\sin(t)\right]_1^X+\frac{1}{\alpha}\int_1^X t^{-\alpha}\cos(t)\,dt=-\frac{\sin(X)}{\alpha X^\alpha}+\frac{\sin(1)}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}\int_1^X\frac{\cos(t)}{t^\alpha}dt$$

$$\int_1^X\frac{\cos(t)}{t^\alpha}dt=\alpha\int_1^X\frac{\sin(t)}{t^{\alpha+1}}dt+\frac{\sin(X)}{X^\alpha}-\sin(1)$$

Les termes de droites admettent une limite lorsque $X\to+\infty$ donc $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t^\alpha}dt$ converge.

2.

$$\frac{\cos^2(t)}{t}=\frac{1+\cos(2t)}{2t}=\frac{1}{2t}+\frac{\cos(2t)}{2t}$$

$$\int_1^X\frac{\cos(2t)}{2t}dt=\frac{1}{2}\int_2^{2X}\frac{\cos(u)}{u}du=\frac{1}{2}\int_1^{2X}\frac{\cos(u)}{u}du+\frac{1}{2}\int_2^1\frac{\cos(u)}{u}du$$

En faisant le changement de variable $u=2t$

La première intégrale converge grâce au 1. et la seconde est finie donc $\frac{\cos(2t)}{2t}$ est intégrable en $+\infty$, et comme $\frac{1}{2t}$ n'est pas intégrable en $+\infty$ (fonction de Riemann avec $\alpha=1$) par conséquent $\frac{\cos^2(t)}{t}$ n'est pas intégrable en $+\infty$ (la somme d'une intégrale divergente et d'une intégrale convergente diverge).

Comme $|\cos(t)|<1$ on a $\cos^2(t)\leq|\cos(t)|$ et donc

$$\frac{\cos^2(t)}{t}\leq\frac{|\cos(t)|}{t}$$

La première fonction n'étant pas intégrable en $+\infty$ la seconde ne l'ai pas n'ont plus. Autrement dit $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos(t)}{t}\right|dt$ diverge

$$\frac{\frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}+\frac{\cos^2(t)}{t}}{\frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}}=1+\frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}\to 1$$

Donc

$$\frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}\sim\frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}+\frac{\cos^2(t)}{t}$$

$\int_1^{+\infty}\frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}dt$ converge grâce au 1.

$\frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}+\frac{\cos^2(t)}{t}$ est la somme d'une fonction intégrable en $+\infty$ et d'une qui ne l'ai pas donc $\int_1^{+\infty}\left(\frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}+\frac{\cos^2(t)}{t}\right)dt$ diverge.

Remarque :

Le résultat qui veut que deux fonctions équivalentes en $+\infty$ soit de même nature nécessite que ces deux fonctions soient de signes constants (positif dans la cours, mais pour négatif cela revient au même) or ces deux fonctions sont parfois positives et parfois négatives.

Allez à : Exercice 8

Correction exercice 9.

1. Il y a deux problème en 0 et en 1
   En 0 :
$$x^{\frac{1}{2}}\frac{x-1}{\ln(x)}\to 0$$
   D'après les règles de Riemann en 0 si $x^{\alpha}f(x)\to 0$ avec $\alpha<0$ alors la fonction est intégrable en 0.
   En 1 on pose $t=1-x\to 0$
$$\frac{x-1}{\ln(x)}=\frac{-t}{\ln(1-t)}=\frac{-t}{-t+o(t)}=\frac{1}{1+o(1)}\to 1$$
   La fonction est prolongeable par continuité en 1 par $f(1)=1$ donc la fonction est intégrable.
2. A l'aide de la formule de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction $f(x)=\ln(x)$ il existe $c\in]x,1[$ tel que
$$f(x)=f(1)+(x-1)f'(c)$$
$$\ln(x)=(x-1)\times\frac{1}{c}$$
$$x<c<1\Leftrightarrow 1<\frac{1}{c}<\frac{1}{x}\Leftrightarrow x-1>\frac{x-1}{c}>\frac{x-1}{x}$$
   Car $x-1<0$, on en déduit que
$$x-1>\ln(x)>\frac{x-1}{x}$$
3. On fait le changement de variable $t=x^2$, $dt=2xdx$, $x=0\Rightarrow t=0$ et $x=X\Rightarrow t=X^2$
$$\int_0^X\frac{xdx}{\ln(x)}=\frac{1}{2}\int_0^{X^2}\frac{dt}{\ln(t^2)}=\frac{1}{2}\int_0^{X^2}\frac{dt}{2\ln(t)}=\int_0^{X^2}\frac{dt}{\ln(t)}=\int_0^{X^2}\frac{dx}{\ln(x)}$$
4.
$$\int_0^X\frac{x-1}{\ln(x)}dx=\int_0^X\frac{x}{\ln(x)}dx-\int_0^X\frac{1}{\ln(x)}dx=\int_0^{X^2}\frac{1}{\ln(x)}dx-\int_0^X\frac{1}{\ln(x)}dx=\int_X^{X^2}\frac{1}{\ln(x)}dx$$
   A partir de
$$\frac{x-1}{x}<\ln(x)<x-1$$
   En divisant par $x-1<0$
$$\frac{1}{x-1}>\frac{1}{\ln(x)}>\frac{x}{x-1}$$
$$\int_X^{X^2}\frac{x}{x-1}dx\le\int_X^{X^2}\frac{1}{\ln(x)}dx\le\int_X^{X^2}\frac{1}{x-1}dx$$
$$\int_X^{X^2}\frac{x}{x-1}dx=\int_X^{X^2}\frac{x-1+1}{x-1}dx=\int_X^{X^2}dx+\int_X^{X^2}\frac{1}{x-1}dx=X^2-X+\ln\left(\frac{X^2-1}{X-1}\right)$$
$$=X(X-1)+\ln(X+1)$$
$$\int_X^{X^2}\frac{1}{x-1}dx=\ln(X+1)$$
   On en déduit que
$$X(X-1)+\ln(X+1)\le\int_X^{X^2}\frac{1}{\ln(x)}dx=\int_0^X\frac{x-1}{\ln(x)}dx\le\ln(X+1)$$
   En faisant tendre X vers 1on trouve que
$$\int_0^1\frac{x-1}{\ln(x)}dx=\ln(2)$$

Allez à : Exercice 9

Correction exercice 10.

On pose

$$F(x)=\int_x^b f(t)dt \qquad \text{et} \qquad G(x)=\int_x^b g(t)dt$$

D'après le théorème des accroissements finis généralisés (pour deux fonctions), entre x et $X>x$, il existe $c\in]x,X[$ tel que

$$\left(F(x)-\lim_{X\to b^-}F(X)\right)G'(c_x)=\left(G(x)-\lim_{X\to b^-}F(X)\right)F'(c_x)$$

On a

$$F'(x)=-f(x) \qquad \text{et} \qquad G'(x)=-g(x)$$

Et

$$\lim_{X\to b^-}F(X)=0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{X\to b^-}F(X)$$

Donc

$$F(x)g(c_x)=G(x)f(c_x)$$

Comme f et g sont équivalentes au voisinage de b, il existe une fonction ϵ tendant vers 0 lorsque $x\to b^-$ tel que

$$\frac{f(x)}{g(x)}=1+\epsilon(x)\Leftrightarrow f(x)=g(x)\big(1+\epsilon(x)\big)$$

Donc

$$F(x)g(c_x)=G(x)g(c_x)\big(1+\epsilon(c_x)\big)$$

g ne peut être identiquement nulle lorsque l'on s'approche de b^- sinon f et g ne peuvent pas être équivalente, bref on simplifie par $g(c_x)$

$$F(x)=G(x)\big(1+\epsilon(c_x)\big)$$

Comme $c\in]x,b^-[$

$$\lim_{x\to b^-}\epsilon(c_x)=0$$

Ce qui montre que $F\sim G$

Allez à : Exercice 10

Remarque :

En 1988 c'est tombé à l'agrégation de mathématiques, il n'y en a pas un sur dix qui a su faire !

Correction exercice 11.

1. En 0. $\frac{\mathrm{Ln}(t)}{t^2+a^2}\sim\frac{\ln(t)}{a^2}$
   $t^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(t)}{a^2}\to 0$ et $\frac{1}{2}<1$, d'après les règles de Riemann, l'intégrale $\int_0\frac{\ln(t)}{a^2}dt$ converge.
   $\frac{\ln(t)}{a^2}$ est de signe constant au voisinage de 0 donc l'intégrale $\int_0\frac{\ln(t)}{t^2+a^2}dt$ converge.
   En $+\infty$. $\frac{\mathrm{Ln}(t)}{t^2+a^2}\sim\frac{\ln(t)}{t^2}$
   $t^{\frac{3}{2}}\frac{\ln(t)}{t^2}\to 0$ et $\frac{3}{2}>1$, d'après les règles de Riemann, l'intégrale $\int^{+\infty}\frac{\ln(t)}{t^2}dt$ converge.
   $\frac{\ln(t)}{t^2}$ est de signe constant en $+\infty$ donc $\int^{+\infty}\frac{\ln(t)}{t^2+a^2}dt$.
   Finalement I converge.
2. $dt=-\frac{a^2}{x^2}dx$ et $\frac{\ln(t)}{t^2+a^2}=\frac{\ln\left(\frac{a^2}{x}\right)}{\frac{a^4}{x^2}+a^2}$
3. Si $t=\varepsilon$ alors $x=\frac{a^2}{\varepsilon}$ et si $t=X$ alors $x=\frac{a^2}{X}$

$$I_{\varepsilon,X}=\int_{\varepsilon}^{X}\frac{\ln(t)}{t^2+a^2}dt=\int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}}\frac{\ln\left(\frac{a^2}{x}\right)}{\frac{a^4}{x^2}+a^2}\left(-\frac{a^2}{x^2}\right)dx=\int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}}\frac{\ln(a^2)-\ln(x)}{\left(\frac{a^2}{x^2}+1\right)a^2}\left(-\frac{a^2}{x^2}\right)dx=-\int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}}\frac{2\ln(a)-\ln(x)}{a^2+x^2}dx$$

$$=-2\ln(a)\int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}}\frac{1}{a^2+x^2}dx+\int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}}\frac{\ln(x)}{a^2+x^2}dx=-2\ln(a)\left[\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)\right]_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}}+\int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}}\frac{\ln(x)}{a^2+x^2}dx$$

$$=-2\frac{\ln(a)}{a}\arctan\left(\frac{a}{X}\right)+2\frac{\ln(a)}{a}\arctan\left(\frac{a}{\varepsilon}\right)+\int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}}\frac{\ln(x)}{a^2+x^2}dx$$

4. $\mathrm{Lim}_{\varepsilon\to 0^+}\frac{a^2}{\varepsilon}=+\infty$ et $\lim_{X\to+\infty}\frac{a^2}{X}=0$ donc $\lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ X\to+\infty}}\int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}}\frac{\ln(x)}{a^2+x^2}dx=\int_{+\infty}^{0}\frac{\ln(x)}{a^2+x^2}dx=-I$

$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\arctan\left(\frac{a}{\varepsilon}\right)=\frac{\pi}{2}$ et $\lim_{X\to+\infty}\arctan\left(\frac{a}{X}\right)=\arctan(0)=0$

En faisant tendre ε vers 0 et X vers l'infini dans la relation ci-dessous on a :

$$I=\frac{2\times\ln(a)}{a}\frac{\pi}{2}-I$$

D'où

$$I=\frac{\ln(a)}{a}\frac{\pi}{2}$$

Allez à : Exercice 11